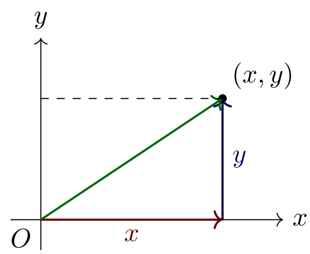
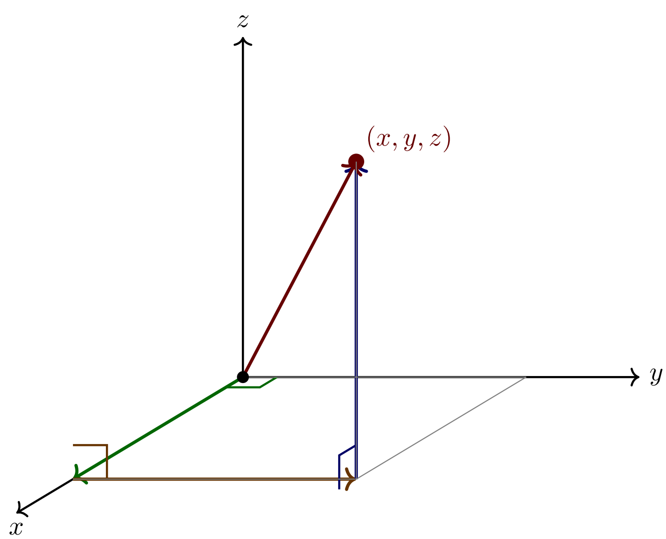
1.2 Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Vecteurs dans le plan et l'espace

Dans un repère (Oxy), un point est de coordonnées (x, y) s'il faut se déplacer de x dans la direction de l'axe horizontal, puis de y dans la direction de l'axe vertical pour atteindre ce point **depuis l'origine O**.



De même, en dimension 3, pour atteindre le point de coordonnées (x, y, z) **en partant de l'origine**, il faut se déplacer de x dans la direction de l'axe (Ox), puis de y dans la direction de l'axe (Oy), puis de z dans la direction de l'axe (Oz).



Dans ces deux cas, les coordonnées d'un point désignent implicitement un déplacement de l'origine vers ce point. Il est donc naturel de noter un point comme ce déplacement, et d'interpréter cet ensemble ordonné de nombres comme un vecteur. Dans ce cas, on notera plutôt les coordonnées avec une matrice colonne.

Définition 1.1.2.27 *Vecteur de $\mathbb{R}^n$*

En algèbre linéaire, $\mathbb{R}^n$ sera vu comme un ensemble de vecteurs, exprimés sous forme de matrice colonne.

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

On appelle composantes de $\overrightarrow{u}$ les u_i.

On note $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \mid u_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$

Définition 1.1.2.28 *Égalité de vecteurs*

Deux vecteurs sont égaux si les deux propriétés suivantes sont vraies.

1. ils ont le même nombre de composantes
2. les composantes correspondantes sont identiques.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \iff u_i = v_i \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}$$

Exemples.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Définition 1.1.2.29 *Vecteur nul*

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur à n composantes dont toutes les composantes sont nulles.

$\overrightarrow{0}_n = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} n$ composantes.

Remarque importante 1.1.2.30

Chaque colonne d'une matrice $m \times n$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On pourra noter

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} & \cdots & \overrightarrow{a_n} \end{bmatrix} \text{ où } \overrightarrow{a_i} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \text{ est la } i\text{-ème colonne de } A.$$

1.2.2 Opérations sur $\mathbb{R}^n$

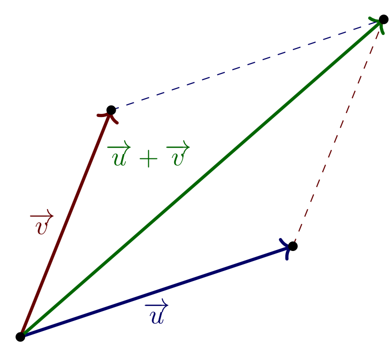
1.2.2.1 Addition de deux vecteurs

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, la somme de ces vecteurs est obtenue en additionnant les composantes correspondantes :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

Remarques 1.1.2.31.

1. *Attention ! Cela n'a pas de sens d'additionner deux vecteurs de dimensions différentes.*
2. *Cette opération est naturelle, car on a interprété un vecteur comme un déplacement depuis l'origine. La figure suivante illustre cela.*



Exemples. $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

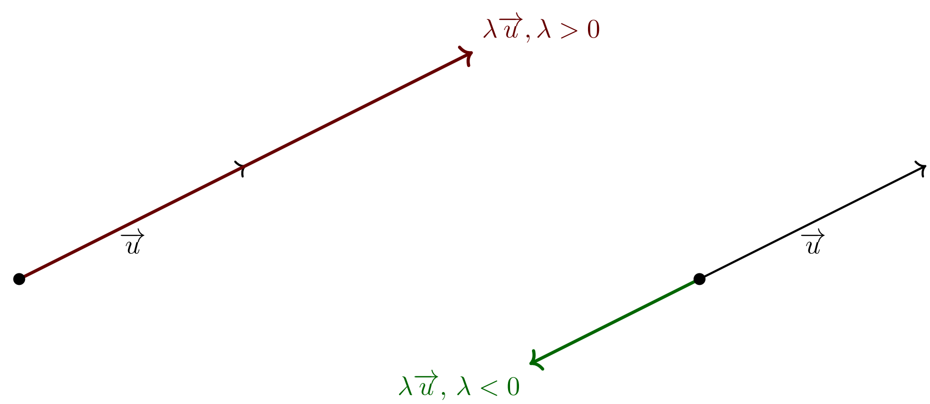
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ -1+4 \\ 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$ est l'opposé de $\overrightarrow{u}$.

1.2.2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors le produit de λ par $\overrightarrow{u}$ est obtenu en multipliant chaque composante de $\overrightarrow{u}$ par λ. $\lambda\overrightarrow{u}=\lambda\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\\\vdots\\\lambda u_n\end{bmatrix}$.

Exemple. $\overrightarrow{u}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}, \lambda=-3\ \lambda\overrightarrow{u}=-3\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\3\\-9\end{bmatrix}$



Pour simplifier, on notera $\overrightarrow{u}+(-1)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.

1.2.2.3 Propriétés des opérations sur $\mathbb{R}^n$

Propriété 1.1.2.32

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in\mathbb{R}^n$, $a,b\in\mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

Commutativité $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$

Associativité 1 $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$

Distributivité 1 $a(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=a\overrightarrow{u}+a\overrightarrow{v}$

Distributivité 2 $(a+b)\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{u}$

Associativité 2 $(ab)\overrightarrow{u}=a(b\overrightarrow{u})$

1.2.3 Combinaisons linéaires

Définition 1.1.2.33 *Vecteurs colinéaires*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Autrement dit, ils ont la même direction, ils sont portés par la même droite.

Exemples. $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ est colinéaire à $\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}-1\\\frac{-2}{3}\end{bmatrix}$

Remarque 1.1.2.34. 0 *est colinéaire à tous les vecteurs.*

Définition 1.1.2.35 *Combinaison linéaire*

Soit $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des scalaires. Alors, le vecteur

$$\overrightarrow{w} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{v_m}$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m}$.
Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 1.1.2.36. *Un ou plusieurs λ_i peuvent être nuls.*

Exemple. 1.

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}3\\9\\3\end{bmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$$

$$\overrightarrow{w} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + (-2) \cdot \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}3\\9\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-8\\-9\end{bmatrix}$$

2. Est-il possible d'écrire $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\\6\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 + 4\lambda_2\\2\lambda_1 + 5\lambda_2\\3\lambda_1 + 6\lambda_2\end{bmatrix}$$

Autrement dit, $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ si et seulement s'il existe λ_1 et

λ_2 tels que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'après ce que l'on a dit sur les égalités de vecteurs, c'est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$, ce qui prouve que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

Dans cet exemple, on a résolu une équation vectorielle. Voyons cela plus généralement dans la section suivante.

1.2.4 Équations vectorielles

Définition 1.1.2.37 *Équation vectorielle*

Une équation vectorielle a pour inconnues des réels et pour coefficients des vecteurs :

$$x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_m\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{b}$$

Elle a le même ensemble de solutions que le système dont la matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \cdots & \overrightarrow{v_m} & \overrightarrow{b} \end{bmatrix}$$

où chaque colonne est un vecteur.

Remarque 1.1.2.38. $\overrightarrow{b}$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire de* $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ *si et seulement si l'équation vectorielle admet une solution.*

1.2.5 Génération linéaire

Définition 1.1.2.39 *Espace vectoriel engendré*

Soit $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ est noté $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m})$ et il est appelé sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$. Autrement dit, $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m})$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent sous la forme $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{v_m}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Remarques 1.1.2.40.

1. *Dire que* $\overrightarrow{b}$ *appartient à* $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m})$ *revient à dire que la matrice* $\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} & \cdots & \overrightarrow{v_m} & \overrightarrow{b} \end{bmatrix}$ *a au moins une solution.*
2. *Il y a une infinité de vecteurs dans un ensemble engendré par des vecteurs non tous nuls.*
3. $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{0}\right) = \{\overrightarrow{0}\}$
4. *Si* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$, *alors* $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{v_m} = 0$. *Donc* $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m})$.
5. $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v})$ *est la droite engendrée par* $\overrightarrow{v}$. *C'est la droite qui porte* $\overrightarrow{v}$.
6. *Si* $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ *ne sont pas colinéaires, alors* $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \mathbb{R}^2$
7. *Si* $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^n$ *ne sont pas colinéaires, alors* $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ *est un plan dans* $\mathbb{R}^n$ *passant par l'origine.*
8. *Si* $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^n$ *sont colinéaires, alors* $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ *est une droite dans* $\mathbb{R}^n$ *passant par l'origine.*

9. *Soit le plan* π *engendré par* $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$. *Quelle est l'équation de ce plan ?*

   On a $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$, *ce qui équivaut à* $\begin{bmatrix}1 & 4 & x\\2 & 5 & y\\3 & 6 & z\end{bmatrix}$

   admet une solution.

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & x\\2 & 5 & y\\3 & 6 & z\end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 4 & x\\0 & -3 & y-2x\\3 & 6 & z\end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 4 & x\\0 & -3 & y-2x\\0 & -6 & z-3x\end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 4 & x\\0 & 3 & 2x-y\\0 & -6 & z-3x\end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 4 & x\\0 & 3 & 2x-y\\0 & 0 & z+x-2y\end{bmatrix}$$

   Donc l'équation du plan est : $x - 2y + z = 0$.

   On a donc un moyen très simple de savoir si un point donné est sur ce plan. Par exemple :

   $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in \pi$, $\quad \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \notin \pi$, $\quad \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \in \pi$.

10. *Les ensembles engendrés par des vecteurs peuvent être des ensembles de solutions de systèmes d'équations. Par exemple, pour le système d'équations de* $\mathbb{R}^3$ *en* x, y, z *suivant :*

$$\left\{ z = 0 \right.$$

   La matrice augmentée (échelonnée-réduite) de ce système est

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

   Et l'ensemble de solutions est $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.